Second Order Asymptotic Optimality of Estimators for the Non-Regular Distribution (Non-Regular Statistical Estimation II)

赤平, 昌文

数理解析研究所講究録
590巻 1986年 33-49

Second Order Asymptotic Optimality of Estimators for the Non-Regular Distribution

赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

はじめに.

非正則な場合の2次の漸近最適性、特に2次の漸近有効性は、いくつかの特別な場合に論じられている (Akahira, 1982). また両側指数分布の位置母数の推定量の2次の漸近有効性に関する議論は知られている (Akahira and Takeuchi, 1981). ここでは、より一般的に、有限個の cusp をもつ密度関数の場合に、2次の漸近中央値不偏推定量の2次の分布の限界を求め、さらに修正された最尤推定量の2次の漸近分布も求めて、比較を試みたい. またいくつかの例題についても述べる.

1. 定義と仮定

$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に、いずれも (Lebesgue測度に関して連続な) 密度関数 $f(x,\theta)$ $(\theta \in \Theta)$ に従う確率変数列とし、$\Theta = R^1$ で $f(x,\theta) = f(x-\theta)$ である、すなわち

θは位置母数であると仮定する．さらに次の(A.1)，(A.2)，(A.3)を仮定する．

(A.1)．$f(x)$は連続で、m個の点 $s_1, \cdots, s_m$ に対して $\lim_{x\to s_j\pm 0} f'(x)$，$\lim_{x\to s_j\pm 0} f''(x)$ $(j=1,\cdots,m)$が存在し、その他の点では $f(x)$は3回微分可能で、すべてのxに対して $f(x)>0$ でかつ $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$ である．

(A.2)．fに関するFisher情報量Iは正でかつ有限である．すなわち

$$0 < I = E_0\left[\left\{\frac{d\log f(X)}{dx}\right\}^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{d\log f(x)}{dx}\right\}^2 f(x)\,dx < \infty$$

である．

(A.3)．各 $i=1,2,3$ に対して、$l^{(i)}(x) = d^i\log f(x)/dx^i$ とおくとき、$J = E_0[l^{(1)}(X)l^{(2)}(X)]$，$K = E_0[\{l^{(1)}(X)\}^3]$，$L_3 = E_0[l^{(3)}(X)]$ が存在する．

条件(A.1)～(A.3)を満たす分布としては、区分的指数分布が考えられる．

各 $\theta\in\Theta$ と nについて、密度関数 $f(x-\theta)$をもつ確率測度P_θのn個の直積を $P_{\theta,n}$とする．推定量 $\hat{\theta}_n$が$\sqrt{n}$-一致推定量であるとは、任意の $\varepsilon>0$と任意の $\vartheta\in\Theta$ に対して、十分小さな正数δが存在して

$$\lim_{L\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{\theta:|\theta-\vartheta|<\delta} P_{\theta,n}\{\sqrt{n}|\hat{\theta}_n-\theta|\geq L\}=0$$

が成り立つことであると定義する．

ある $\sqrt{n}$・一致推定量 $\hat{\theta}_n$ が 2次の漸近的中央値不偏 (asymptotically median unbiased 略して AMU) であるとは、任意の $\vartheta \in \Theta$ に対して、正数 δ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta:|\theta-\vartheta|<\delta} \sqrt{n}\left| P_{\theta,n}\{\hat{\theta}_n \le \theta\} - \frac{1}{2}\right| = 0 ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta:|\theta-\vartheta|<\delta} \sqrt{n}\left| P_{\theta,n}\{\hat{\theta}_n \ge \theta\} - \frac{1}{2}\right| = 0$$

が成り立つことである.

2次の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ について、$G_0(t,\theta)+n^{-1/2}G_1(t,\theta)$ が $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)$ (または $\hat{\theta}_n$) の 2次の漸近分布であるとは、

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left| P_{\theta,n}\{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)\le t\} - G_0(t,\theta) - n^{-1/2}G_1(t,\theta)\right| = 0$$

が成り立つことである. ここで $G_0(t,\theta)$ は分布関数であるが、$G_1(t,\theta)$ は、一般には、絶対連続関数で、従って 2次の漸近分布は、いわゆる分布関数にはならない.

ある 2次の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n^*$ の 2次の漸近分布が、2次の AMU 推定量の 2次の漸近分布の限界を一様に達成するとき、$\hat{\theta}_n^*$ を 2次の漸近有効推定量であるという.

これから以後は、有限個の cusp をもつ密度関数の場合を考え、第2節で 2次の AMU 推定量の2次の漸近分布の限界を求める. 第3節で最尤推定量の 2次の漸近分布を求め、第4節で、前節で得られた結果に関するいくつかの例題について述べる.

3．2次のAMU推定量の2次の漸近分布の限界

ここでは、位置母数の場合を考えるので、真のパラメータθ_0は0として一般性を失わない．2次のAMU推定量の2次の漸近分布の限界を求めるために、仮説$H^+: \theta=\Delta\ (\Delta>0)$，対立仮説$K: \theta=0$という仮説検定問題を考える．このとき、対数尤度比検定統計量$\log L$は次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
\log L &= \log \prod_{i=1}^{n} \frac{f(X_i)}{f(X_i-\Delta)} = \sum_{i=1}^{n} \{\log f(X_i) - \log f(X_i-\Delta)\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big[\Delta \frac{f'(X_i)}{f(X_i)} \Big\{1-\sum_{j=1}^{m} \chi_{I_j(\Delta)}(X_i)\Big\} + \Big\{ \frac{\Delta^3}{6} \ell^{(3)}(X_i) \\
&\qquad - \frac{\Delta^2}{2}\cdot \frac{f(X_i)f''(X_i)-f'(X_i)^2}{f(X_i)^2} \Big\}\Big\{1-\sum_{j=1}^{m} \chi_{I_j(\Delta)}(X_i)\Big\} \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{m} \Big\{ \frac{b_{j+}-b_{j-}}{a_j}(X_i-s_j) + \Delta \frac{b_{j-}}{a_j} \Big\} \chi_{I_j(\Delta)}(X_i) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \{ c_{j-}(X_i-s_j-\Delta)^2 - c_{j+}(X_i-s_j)^2 \} \chi_{I_j(\Delta)}(X_i) \Big] \\
&\qquad + o_p(n\Delta^3) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Z_i(\Delta) + o_p(n\Delta^3) \qquad (\text{say}),
\end{aligned}
$$

ただし、各$j=1,\cdots,m$について、$\chi_{I_j(\Delta)}(x)$の区間$I_j(\Delta)=(s_j, s_j+\Delta)$の定義関数、$a_j=f(s_j)$，$b_{j\pm}=\lim_{x\to s_j\pm 0} f'(x)$，$c_{j\pm}=\lim_{x\to s_j\pm 0}\{f(x)f''(x)-f'(x)^2\}/f(x)^2$（複号同順）とする．

そこで$\sum_{i=1}^{n} Z_i(\Delta)$の漸近平均、分散、3次のキュムラントを分布$P_{0,n}$の下で$\Delta^3$のオーダーまで求める．

各 $i=1,\cdots,n$ について

$$E_0[Z_i(\Delta)]=\frac{\Delta^2}{2}I+\frac{\Delta^3}{6}\Big[L_3-\sum_{j=1}^{m}\Big\{\frac{b_{j+}(b_{j+}-b_{j-})}{a_j}-a_j(c_{j+}-c_{j-})\Big\}\Big]+o(\Delta^3),$$

$$E_0[Z_i^2(\Delta)]=\Delta^2 I-\Delta^3\Big\{J+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{3a_j}(b_{j+}-b_{j-})(2b_{j+}+b_{j-})\Big\}+o(\Delta^3),$$

$$E_0[Z_i^3(\Delta)]=\Delta^3 K+o(\Delta^3)$$

が成り立つ.

このとき $\Delta=tn^{-1/2}$ $(t>0)$ とすれば、次の補題が成り立つ.

<u>補題3.1.</u> 仮定(A.1)〜(A.3)の下で、$\sum_{i=1}^{n}Z_i(\Delta)$ の漸近平均、分散、3次のキュムラントが分布 $P_{0,n}$ の下で、$n^{-1/2}$ のオーダーまで、次のように与えられる.

$$E_0\Big[\sum_{i=1}^{n}Z_i(\Delta)\Big]=\frac{t^2 I}{2}+\frac{t^3}{6\sqrt{n}}\Big[L_3-\sum_{j=1}^{m}\Big\{\frac{1}{a_j}b_{j+}(b_{j+}-b_{j-})-a_j(c_{j+}-c_{j-})\Big\}\Big]+o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big),$$

$$V_0\Big(\sum_{i=1}^{n}Z_i(\Delta)\Big)=t^2 I-\frac{t^3}{\sqrt{n}}\Big\{J+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{3a_j}(b_{j+}-b_{j-})(2b_{j+}+b_{j-})\Big\}+o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big),$$

$$k_0\Big(\sum_{i=1}^{n}Z_i(\Delta)\Big)=E_0\Big[\Big\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(\Delta)-E_0\Big(\sum_{i=1}^{n}Z_i(\Delta)\Big)\Big\}^3\Big]=\frac{t^3K}{\sqrt{n}}+o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

同様にして、$\sum_{i=1}^{n}Z_i(\Delta)$ の漸近平均、分散、3次のキュムラントを分布 $P_{\Delta,n}$ の下で、Δ^3 のオーダーまで求める.

各 $i=1,\cdots,n$ について、

$$\log\frac{f(X_i+\Delta)}{f(X_i)}=\log f(X_i+\Delta)-\log f(X_i)$$

$$= \Delta \frac{f'(X_i)}{f(X_i)} \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{m} \chi_{\underline{I}_j(\Delta)}(X_i) \right\}$$

$$+ \frac{\Delta^2}{2} \cdot \frac{f(X_i) f''(X_i) - f'(X_i)^2}{f(X_i)^2} \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{m} \chi_{\underline{I}_j(\Delta)}(X_i) \right\}$$

$$+ \frac{\Delta^3}{6} \ell^{(3)}(X_i) \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{m} \chi_{\underline{I}_j(\Delta)}(X_i) \right\}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \left\{ \frac{b_{j+} - b_{j-}}{a_j} (X_i - s_j) + \Delta \frac{b_{j+}}{a_j} \right\} \chi_{\underline{I}_j(\Delta)}(X_i)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \left\{ c_{j+} (X_i - s_j + \Delta)^2 - c_j (X_i - s_j)^2 \right\} \chi_{\underline{I}_j(\Delta)}(X_i) + o_p(\Delta^3)$$

$$= Z_i^*(\Delta) + o_p(\Delta^3) \qquad (\text{say})$$

となる。ただし $\underline{I}_j(\Delta) = (s_j - \Delta,\ s_j)$ $(j = 1, \cdots, m)$ とする。

このとき

$$E_\Delta \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i(\Delta) \right) + o_p(n\Delta^3)$$

$$= E_\Delta (\log L)$$

$$= n \int_{-\infty}^{\infty} \{ \log f(x) - \log f(x-\Delta) \} f(x-\Delta) dx$$

$$= n \int_{-\infty}^{\infty} \{ \log f(x+\Delta) - \log f(x) \} f(x) dx$$

$$= n E_0 [Z_i^*(\Delta)] + o_p(n\Delta^3)$$

$$= -\frac{1}{2} n \Delta^2 I + \frac{n\Delta^3}{6} \left[L_3 - \sum_{j=1}^{m} \left\{ \frac{b_{j-}}{a_j} (b_{j+} - b_{j-}) - a_j (c_{j+} - c_{j-}) \right\} \right] + o(n\Delta^3)$$

となる。

同様にして、$E_\Delta [Z_i^2(\Delta)] = E_0 [Z_i^{*2}(\Delta)]$, $E_\Delta [Z_i^3(\Delta)] = E_0 [Z_i^{*3}(\Delta)]$ が求められる。$\Delta = t n^{-1/2}$ $(t > 0)$ とおくと、次の補題が成り立つ。

補題3.2. 仮定(A.1)〜(A.3)の下で $\sum_{i=1}^{n} Z_i(\Delta)$ の漸近平均、分散、3次のキュムラントは、分布 $P_{\Delta,n}$ の下で、$n^{-1/2}$ のオーダーまで次のように与えられる。

$$E_\Delta\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i(\Delta)\right] = -\frac{t^2 I}{2} + \frac{t^3}{6\sqrt{n}}\left[L_3 - \sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{a_j} b_{j-}(b_{j+}-b_{j-}) - a_j(c_{j+}-c_{j-})\right\}\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$V_\Delta\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i(\Delta)\right) = t^2 I + \frac{t^3}{\sqrt{n}}\left\{J + \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{3a_j}(b_{j+}-b_{j-})(b_{j+}+2b_{j-})\right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\kappa_\Delta\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i(\Delta)\right) = \frac{t^3 K}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

次に $t>0$ のときに、2次のAMU推定量の2次の漸近分布の限界を Edgeworth 展開を用いて求める (Akahira and Takeuchi, 1981). 補題3.2から $\sum_{i=1}^{n} Z_i(\Delta)$ の分布の Edgeworth 展開より

$$a = -\frac{t^2 I}{2} + \frac{t^3}{6\sqrt{n}}\left[L_3 - \sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{b_{j-}}{a_j}(b_{j+}-b_{j-}) - a_j(c_{j+}-c_{j-})\right\}\right] - \frac{tK}{6I\sqrt{n}}$$

とおくと

$$P_{\Delta,n}\left\{\sum_{i=1}^{n} Z_i(\Delta) \le a\right\} = \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となることがわかる。

$W_n = -\left\{\sum_{i=1}^{n} Z_i(\Delta) - t^2 I - a\right\}$ とおくと、補題3.1より

$$E_0(W_n) = \frac{t^3}{6\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}(b_{j+}-b_{j-})^2 - \frac{tK}{6I\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$V_0(W_n) = t^2 I - \frac{t^3}{\sqrt{n}}\left\{J + \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{3a_j}(b_{j+}-b_{j-})(2b_{j+}+b_{j-})\right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\kappa_0(W_n) = -\frac{t^3 K}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となるから、W_n の分布の Edgeworth 展開は次のようになる。

(3.1) $P_{0,n}\{W_n \le I t^2\}$

$$= \Phi(\sqrt{I}\,t) + \frac{t^2}{6\sqrt{In}}\phi(\sqrt{I}\,t)\left\{3J+K+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{a_j}(b_{j+}-b_{j-})(b_{j+}+2b_{j-})\right\}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

ただし $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ で $\Phi(u)=\int_{-\infty}^{u}\phi(x)dx$ とする。

$\log L=\sum_{i=1}^{n}Z_i(\Delta)+o_p(n\Delta^3)$ であるから、Neyman-Pearson の基本定理より、棄却域 $\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(\Delta)\ge a\}$ をもつ検定は、水準 $1/2+o(1/\sqrt{n})$ をもつ最強力検定となる。従って、2次の AMU 推定量の2次の漸近分布 $P_{\theta,n}\{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)\le t\}$ の限界が、$t>0$ に対して、$n^{-1/2}$ のオーダーまで (3.1) によって得られることがわかる。

$t<0$ の場合には、仮説 H^-: $\theta=\Delta$ $(\Delta<0)$, 対立仮説 K: $\theta=0$ なる仮説検定問題を考えて、$\Delta=tn^{-1/2}$ $(t<0)$ として $t>0$ の場合と同様に論じられる。

<u>定理 3.1.</u> 仮定 (A.1) ~ (A.3) の下で、2次の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ の2次の漸近分布の限界は、次のように与えられる。

(3.2) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{n}\Big[P_{\theta,n}\{\sqrt{In}(\hat{\theta}_n-\theta)\le t\}$

$$-\Phi(t)-\frac{t^2\phi(t)}{6I^{3/2}\sqrt{n}}\left\{3J+K+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{a_j}(b_{j+}-b_{j-})(b_{j+}+2b_{j-})\right\}\Big]\le 0$$

for all $t>0$,

$$(3.3)\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\Big[P_{\theta,n}\{\sqrt{I n}(\hat{\theta}_n-\theta)\le t\} - \Phi(t)-\frac{t^2\phi(t)}{6I^{3/2}\sqrt{n}}\Big\{3J+K+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{a_j}(b_{j+}-b_{j-})(2b_{j+}+b_{j-})\Big\}\Big]\ge 0$$

for all $t<0$.

注意．(3.2)，(3.3) の第3項目の $\{\cdots\}$ において、最初の項 $3J+K$ は、分布の密度関数 $f(x)$ の正則な部分、2番目の項は $f(x)$ の非正則な部分、すなわち cusp の部分に対応している．従って、もし $f(x)$ の cusp の部分が無くなって滑らかになる、すなわち $b_{j+}=b_{j-}$ $(j=1,\cdots,m)$ の場合には、最初の項 $3J+K$ だけになり、正則な場合に求めた限界と一致することが分かる．

系3.1．仮定 (A.1) ～ (A.3) の下で、さらに

$$(3.4)\qquad \sum_{j=1}^{m}\frac{b_{j+}^2}{a_j}=\sum_{j=1}^{m}\frac{b_{j-}^2}{a_j}$$

ならば、2次の AMU 推定量の2次の漸近分布の限界は、

$$\Phi(t)+\frac{t^2\phi(t)}{6I^{3/2}\sqrt{n}}\Big\{3J+K+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{a_j}(b_{j+}-b_{j-})(b_{j+}+2b_{j-})\,\mathrm{sgn}\,t\Big\}+o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

によって与えられる．

系3.1 は (3.2) と (3.3) の第3項目の $\{\cdots\}$ の部分の和が0となることから証明される．両側指数分布の場合には (3.4) の条件が満たされる（例題5.1を参照）．

4. 修正された最尤推定量の２次の漸近分布

真のパラメータをθ_0、θの最尤推定量を$\hat{\theta}_{ML}$で表わす．$t>0$のとき、$\hat{\theta}_{ML}<\theta_0+tn^{-1/2}$ と $(\partial/\partial\theta)\sum_{i=1}^{n}\log f(X_i-\theta_0-tn^{-1/2})<0$ とは同等になる．位置母数の場合には、$\theta_0=0$ として一般性を失わないから、$\hat{\theta}_{ML}<tn^{-1/2}$ と $\sum_{i=1}^{n}\ell^{(1)}(X_i-tn^{-1/2})>0$ と同等になる．このとき

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\ell^{(1)}\left(X_i-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)&=\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\left\{\frac{f'(X_i)}{f(X_i)}-\frac{t}{\sqrt{n}}\,\frac{f''(X_i)f(X_i)-f'(X_i)^2}{f(X_i)^2}+\frac{t^2}{2n}\ell^{(3)}(X_i)\right\}\\&\qquad\cdot\left\{1-\sum_{j=1}^{m}\chi_{I_j}(X_i)\right\}+\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{b_{j-}}{a_j}+\frac{f''(s_j-0)a_j-b_{j-}^2}{a_j^2}\left(X_j-s_j-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}\chi_{I_j}(X_i)\Bigg]\\&\quad+o_p(1)\\&=\sum_{i=1}^{n}Y_i+o_p(1)\qquad(say)\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $I_j=(s_j,\ s_j+tn^{-1/2})$ $(j=1,\cdots,m)$ とする．第３節と同様の議論から、$\sum_{i=1}^{n}Y_i/\sqrt{n}$ の漸近平均、分散、３次のキュムラントは、分布$P_{0,n}$の下で、次のように与えられる．

$$\begin{aligned}E_0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)&=tI+\frac{t^2}{2\sqrt{n}}\Bigg[L_3-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{a_j}(b_{j+}-b_{j-})(2b_{j+}+b_{j-})\\&\qquad+\sum_{j=1}^{m}\{f''(s_j+0)-f''(s_j-0)\}\Bigg]+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\end{aligned}$$

$$V_0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=I-\frac{t}{\sqrt{n}}\left\{2J+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{a_j}(b_{j+}^2-b_{j-}^2)\right\}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$k_0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\frac{K}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

従って、 $\sum_{i=1}^{n} Y_i / \sqrt{n}$ の分布の Edgeworth 展開から、 $t>0$ の時、 $\hat{\theta}_{ML}$ の2次の漸近分布

$$
\begin{aligned}
(4.1) \quad P_{0,n}\{\sqrt{n}\,\hat{\theta}_{ML} < t\} &= P_{0,n}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i > 0\right\} \\
&= 1 - P_{0,n}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i \leq 0\right\} \\
&= \Phi(\sqrt{I}\,t) + \phi(\sqrt{I}\,t)\left[-\frac{K}{6I^{3/2}\sqrt{n}}\right. \\
&\quad + \frac{t^2}{2\sqrt{In}}\left(2J + \frac{K}{3} + L_3\right) \\
&\quad \left. - \frac{t^2}{2\sqrt{In}}\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{b_{j+}}{a_j}(b_{j+} - b_{j-}) - f''(s_j + 0) + f''(s_j - 0)\right\}\right] \\
&\quad + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}
$$

が得られる。

(4.1) から、最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ は2次の AMU 条件を満たさないことがわかる。従って $\hat{\theta}_{ML}$ を

$$\hat{\theta}_{ML}^{*} = \hat{\theta}_{ML} - \frac{K}{6nI^2}$$

と修正した最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}^{*}$ を考えると、(4.1) から $\hat{\theta}_{ML}^{*}$ の2次の漸近分布も求められる。

また $t<0$ の場合にも、 $t>0$ のときと同様にして、修正最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}^{*}$ の2次の漸近分布も得られる。

<u>定理4.1.</u> 仮定(A.1)〜(A.3)の下で、修正最尤推定量 $\hat{\theta}^*_{ML}=\hat{\theta}_{ML}-\{K/(6nI^2)\}$ の2次の漸近分布は、次のように与えられる.

(4.2) $P_{\theta,n}\{\sqrt{In}(\hat{\theta}^*_{ML}-\theta)\le t\}$

$$
=\begin{cases}
\Phi(t)+\dfrac{t^2\phi(t)}{6I^{3/2}\sqrt{n}}\Big[6J+K+3L_3-3\sum_{j=1}^{m}\Big\{\dfrac{b_{j+}}{a_j}(b_{j+}-b_{j-}) \\
\qquad -f''(s_j+0)+f''(s_j-0)\Big\}\Big]+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{for all } t>0; \\
\Phi(t)+\dfrac{t^2\phi(t)}{6I^{3/2}\sqrt{n}}\Big[6J+K+3L_3-3\sum_{j=1}^{m}\Big\{\dfrac{b_{j-}}{a_j}(b_{j+}-b_{j-}) \\
\qquad -f''(s_j+0)+f''(s_j-0)\Big\}\Big]+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{for all } t<0.
\end{cases}
$$

<u>注意</u>. 修正最尤推定量 $\hat{\theta}^*_{ML}$ の2次の漸近分布(4.2)の右辺の項[⋯]の $6J+K+3L_3$ は、分布の密度関数 $f(x)$ の正則部分に、その他は $f(x)$ の非正則部分、すなわち cusp の部分に対応している. 従って、もし $f(x)$ の cusp を滑らかになる、すなわち $b_{j+}=b_{j-}$, $f''(s_j+0)=f''(s_j-0)$ の場合には、[⋯]の項は $6J+K+3L_3$ のみとなり、正則な場合には $L_3=E_0[\ell^{(3)}(X)]=-3J-K$ でさらに位置母数の時の $K=-2J$ という関係に注意すると、$6J+K+3L_3=J$ となり以前に求めた限界と一致することが分かる.

系 4.1. 仮定(A.1)〜(A.3)の下で、さらに

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{b_{j+}^2}{a_j}-2f''(s_j+0)\right\}=\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{b_{j-}^2}{a_j}-2f''(s_j-0)\right\}$$

ならば、修正最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}^{*}$ の2次の漸近分布は

$$\Phi(t)+\frac{t^2\phi(t)}{6I^{3/2}\sqrt{n}}\left[6J+K+3L_3-3\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{b_{j+}}{a_j}(b_{j+}-b_{j-})-f''(s_j+0)+f''(s_j-0)\right\}\operatorname{sgn}t\right]+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

によって与えられる.

修正最尤推定量の2次の漸近分布は、定理3.1,系3.1で与えられた2次のAMU推定量の2次の漸近分布の限界と $n^{-1/2}$ のオーダーの項を比較できる. 一般に、$\hat{\theta}_{ML}^{*}$ の2次の漸近分布はその限界を一様に達成しないから、$\hat{\theta}_{ML}^{*}$ は2次の漸近有効推定量にならないことがわかる.

5. 例題

この節では、前節で得られた結果に関するいくつかの例を述べる.

例題 5.1.(両側指数分布). $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に、いずれも密度関数 $f(x-\theta)=e^{-|x-\theta|}/2$ $(-\infty<x<\infty)$ に従う確率変数列とする. このとき $f(x)$ は $x=0$ で cusp をもつから、$m=1$ で $s_1=0$ の場合になる. また $I=1$, $J=K=L_3=0$ $a_1=b_{1-}=-b_{1+}=1/2$, $f''(0-0)=f''(0+0)=1/2$ となる. よって

系3.1の条件は満たされるから、2次のAMU推定量の2次の漸近分布の限界は

$$\Phi(t) - \frac{t^2\phi(t)}{6\sqrt{n}}\,\mathrm{sgn}\,t + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となる。一方は、最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ は $X_1, \cdots, X_n$ の中央値 $\mathrm{med}\, X_i$ になり、この2次の漸近分布は、系4.1より

$$\Phi(t) - \frac{t^2\phi(t)}{2\sqrt{n}}\,\mathrm{sgn}\,t + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となる。従って $\hat{\theta}_{ML}$ は2次のAMUであるが、その分布は限界を一様に達成しないから、2次の漸近有効推定量にはならないことが分かる。これらの事実は、Akahira and Takeuchi (1981, page 97) の結果と一致している。

例題5.2. (対称な密度関数). $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に、いずれも密度関数

$$f(x-\theta) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{x-\theta} & (x<\theta), \\ \frac{1}{3} & (\theta \leq x < \theta+1), \\ \frac{1}{3} e^{1-(x-\theta)} & (\theta+1<x), \end{cases}$$

に従う確率変数列とする。このとき、$f(x)$ は $x=0, 1$ で cusp をもつから $m=2$ で $s_1=0$, $s_2=1$ の場合になる。また $I=2/3$, $J=K=L_3=0$ で、$a_1=a_2=1/3$, $b_{1-}=1/3$,

$b_{1+}=0$, $b_{2-}=0$, $b_{2+}=-1/3$, $f''(0-0)=1/3$, $f''(0+0)=0$, $f''(1-0)=0$, $f''(1+0)=1/3$ となる．従って系3.1から、2次のAMU推定量の2次の漸近分布の限界は、

$$\Phi(t)-\frac{t^2\phi(t)}{18\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\sqrt{n}}\operatorname{sgn} t+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となり、系4.1から最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ の2次の漸近分布は

$$\Phi(t)-\frac{t^2\phi(t)}{6\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\sqrt{n}}\operatorname{sgn} t+o\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

になり、$\hat{\theta}_{ML}$ は2次のAMUとなるが、2次の漸近有効推定量にはならないことが分かる．

例題5.3．(非対称な密度関数)．$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に、いずれも密度関数

$$f(x-\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x-\theta} & (x<\theta),\\ \frac{1}{2} & (\theta\le x<\theta+\frac{1}{2}),\\ \frac{1}{2}e^{-2(x-\theta-\frac{1}{2})} & (\theta+\frac{1}{2}\le x),\end{cases}$$

に従う確率変数列とする．このとき $f(x)$ は $x=0$, $1/2$ の時cuspをもつから、$m=2$ で $s_1=0$, $s_2=1/2$ の場合になる．また、$I=3/2$, $J=0$, $K=-3/2$, $L_3=0$, $a_1=a_2=1/2$, $b_{1-}=1/2$, $b_{1+}=0$, $b_{2-}=0$, $b_{2+}=-1$, $f''(0-0)=1/2$, $f''(0+0)=0$, $f''(\frac{1}{2}-0)=0$, $f''(\frac{1}{2}+0)=2$ となる．　よって

定理3.1から、2次のAMU推定量の2次の漸近分布の限界は

$$\begin{cases} \Phi(t) - \dfrac{t^2\phi(t)}{12\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) & (t>0), \\ \Phi(t) + \dfrac{t^2\phi(t)}{3\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) & (t<0) \end{cases}$$

となる。一方、定理4.1から、修正最尤推定量 $\hat{\theta}^*_{ML}=\hat{\theta}_{ML}+(1/9n)$ の2次の漸近分布は

$$\begin{cases} \Phi(t) - \dfrac{t^2\phi(t)}{2\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) & (t>0), \\ \Phi(t) + \dfrac{3t^2\phi(t)}{4\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) & (t<0) \end{cases}$$

となるから、$\hat{\theta}^*_{ML}$ は2次の漸近有効推定量にはならないことが分かる。

6. おわりに.

これまでの議論から分かるように、ここで考えた有限個のcuspをもつ密度関数は、正則、非正則の両面をもつ場合になっていて、そのことは、1次の漸近分布には影響しないが2次の漸近分布まで考えると、$n^{-1/2}$ のオーダーで利いてくることがわかる。さらに、AMU推定量の2次の漸近分布の $n^{-1/2}$ のオーダーの項に、その正則、非正則の両面に対応する

部分が現われる．また２次のＡＭＵ推定量の２次の漸近分布の限界が得られているので、修正最尤推定量のみならず、他の２次のＡＭＵ推定量の２次の漸近分布の $n^{-1/2}$ のオーダーの項での差が求められる．それによって、２次のオーダーまでの漸近的比較が可能になるであろう．

References

Akahira, M. (1982). Remarks on asymptotic properties of generalized Bayes estimators in non-regular cases. Technical Report No. 185, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, California.

Akahira, M. and Takeuchi, K. (1981). Asymptotic Efficiency of Statistical Estimators: Concepts and Higher Order Asymptotic Efficiency. Lecture Notes in Statistics 7, Springer, New York.